1 Enunciado

Tenemos un condensador plano de placas circulares de radio $R = 2.30\,\mathrm{cm}$ separadas par una distancia $d = 1.10\,\mathrm{mm}$. Al condensador llega una corriente $I = 5.00\,\mathrm{A}$. Calcula la el campo magnético generado en el interior del condensador.

2 Solución

La corriente que llega a las placas del condensador hace que aparezcan en ellas una densidades de carga eléctrica de la misma magnitud y de signo opuesto. Estas densidades de carga van aumentando con el tiempo, por lo que el campo eléctrico generado en el interior del condensador depende del tiempo. Entonces hay una corriente de desplazamiento en el interior del condensador. Según nos dice la Ley de Ampère-Maxwell, esta corriente de desplazamiento genera un campo magnético, que vamos a calcular.

En el interior del condensador no hay corriente de conducción, por lo que la Ley de Ampère-Maxwell se escribe

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_d = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Como la distancia entre placas es mucho menor que su radio, podemos suponer que el campo eléctrico es uniforme. La distribución de campo eléctrico en el condensador es similar a la del campo magnético en el interior de un solenoide en el problema 1. Allí vimos que ese campo magnético producía un campo eléctrico con líneas de campo en forma de circunferencia. Podemos hacer aquí la misma suposición. Así, las líneas de campo magnético en el interior del condensador son circunferencias y el campo es de la forma

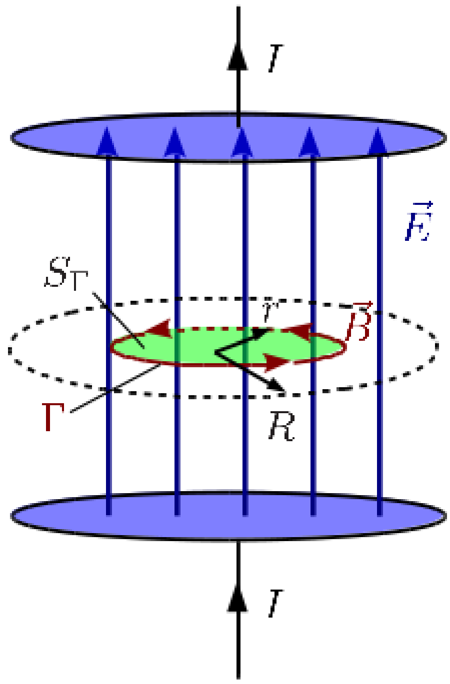
$$\vec{B} = B(r,t)\,\vec{u}_\varphi$$

El vector $\vec{u}_\varphi$ es el vector azimutual de las coordenadas polares y r es la distancia al eje central del condensador.

Para aplicar la Ley de Ampère-Maxwell escogemos como línea cerrada una circunferencia concéntrica con el eje del condensador, y como superficie el círculo definido por ella. El lado izquierdo de la Ley queda

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} &= \oint_\Gamma B(r,t)\mathrm{d}l\\ &= B(r,t)\oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi\, r\, B(r,t)\end{aligned}$$

El campo sale de la integral pues su módulo es el mismo en todos los puntos de la circunferencia.



Para el lado derecho, observamos que el flujo eléctrico que cuenta es el que pasa por dentro de la circunferencia. Esto es

$$\Phi_e = \int_{S_\Gamma} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{S_\Gamma} E(t)\mathrm{d}A = E(t)\int_{S_\Gamma} \mathrm{d}A = \pi\, r^2\, E(t)$$

El lado derecho de la Ley de Ampère-Maxwell queda

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} = \mu_0\varepsilon_0\pi\, r^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Igualando los dos términos de la Ley tenemos

$$2\pi\, r\, B(r,t) = \mu_0\varepsilon_0\pi\, r^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Despejando tenemos

$$B(r,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\, r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

En el problema anterior vimos que el campo eléctrico entre las placas del condensador es

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0\pi\, R^2}$$

Aquí el área es el de toda la placa del condensador. Teniendo en cuenta la relación entre la intensidad y la carga en las placas tenemos

$$B(r,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\, r}{2}\frac{1}{\varepsilon_0\,\pi\, R^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0\, r}{2\,\pi\, R^2}\, I(t)$$

El campo magnético es nulo en el eje del condensador y aumenta según nos acercamos al borde. El valor máximo se obtiene cuando $r = R$, es decir, justo en el borde de las placas. El valor numérico es

$$B(r=R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, R} = 4.35\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Como vemos es un campo muy pequeño.